数理解析研究所講究録
566巻 1985年 13-24

Linear arboricity of 2-regular directed graphs

筑波大 社工 中山 明 (Akira Nakayama)
東 大 理 榎本彦衛 (Hikoe Enomoto)

Abstract

線形樹化数と呼ばれる無向グラフでの概念を有向グラフに対して適用し，考察する。さらに，Pérocheが与えた誤った証明を訂正し，『Dが位数3以上の連結2－正則有向グラフで，K_3^*と同形なグラフでないならば，Dの有向線形樹化数は3である。』という定理を証明する。

Definitions and Notations

無向グラフGに対して、V(G), E(G)をそれぞれGの点集合辺集合とする。点$x \in V(G)$に対して、xと隣接している辺の数をxの次数といい，$\deg(x)$と書く。Gがk-正則グラフとは，各点$x \in V(G)$について$\deg(x) = k$となるグラフのことである。K_nで位数nの完全グラフを表わすものとする。Gの各成分が（開いた）道となっているとき，Gを線形林と呼ぶ。無向グラフGに対して、E(G)を覆うのに必要な線形林の最小個

数をGの線形樹化数といい，$la(G)$で表わす．

同様に有向グラフDに対して，$V(D)$，$A(D)$をそれぞれDの点集合、弧集合とする。点$x \in V(D)$に対して、xから出ている弧の数をxの出次数，xに入ってくる弧の数を入次数といい、それぞれ$deg^+(x)$，$deg^-(x)$で表わす．Dがk－正則有向グラフであるとは、各点$x \in V(D)$について$deg^+(x) = deg^-(x) = k$となる有向グラフのことである。K_n^*は位数nの$(n-1)$－正則有向グラフとする。Dが有向線形林であるとは、Dの各成分が（開いた）有向道となる有向グラフのことである。有向グラフDに対して、$A(D)$を覆うのに必要な有向線形林の最小個数をDの有向線形樹化数と呼び、$l\vec{a}(D)$と書く。

実数αに対して，$\lceil \alpha \rceil$はαの切り上げとする。

Introduction

線形樹化数の概念は、Harary [2] によって導入され、今までに種々の結果が得られている（[1]の文献を参照のこと。）この問題に対しては，つぎの予想1が有名である。

予想1　　Gがk－正則グラフならば，

$$la(G) = \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil$$

この予想について、$k \leqq 6$，$k=8$，$k=10$ (?) の場合のみ確かめられている。一方，有向線形樹化数に関して Péroche はつぎの予想2を与えた。

予想2　　Dがk－正則有向グラフならば,

$$l\vec{a}(D) = k+1$$

さらにPérocheは、$k=2$の場合の証明を試みたが，誤っていた。つまり，帰納法を用いて示そうとしたが，例外となるK_3^*の存在と連結性を全く考慮していなかった。しかしながら後で示すように、適当な条件を追加することにより、$l\vec{a}(D)=3$が証明される。K_n^*は$(n-1)$－正則有向グラフであるが、この有向グラフに関して、つぎの事実1が成立し、予想3が考えられる。

事実1　　nが偶数ならば,

$$l\vec{a}(K_n^*) = n .$$

予想3　　nが奇数ならば

$$l\vec{a}(K_n^*) = n+1 .$$

この事実を示すには、$la(K_n) = \lceil n/2 \rceil$ ([3]) と不等式 $l\vec{a}(K_n^*) \leqq 2\, la(K_n)$ を用いればよい。一方、この予想については、$n=3, 5$の時だけ確かめられている。ここで注意すべき点は、K_3^*, K_5^*に対して予想2は成立しないことである。したがって、kが偶数の場合の予想2は、つぎの修正予想2にすることが考えられる。

修正予想2　　偶数kに対して、Dがk-正則有向グラフで、各連結成分がK_{k+1}^*と同形でなければ，$l\vec{a}(D) = k+1$

以下に示す仮定に対して、適当な条件を追加することによって $k=2$ に関して修正予想2が成立することがわかる。つまり，有向グラフDに対して、つぎの2つの仮定を用意する。

<u>A1</u>　　Dはループをもたない。

<u>A2</u>　　Dは多重弧をもたない。

このとき、つぎの2つの定理を得る。

<u>定理 A</u>　　DはA1，A2を満たすと仮定する．

Dが連結な2-正則有向グラフで，$|V(D)| \geq 4$ ならば，

$$l\vec{a}(D) = 3$$

<u>定理 B</u>　　DはA1を満たすと仮定する。

Dが連結な2-正則有向グラフで、$D \ncong K_3^*$ かつ $|V(D)| \geq 3$ ならば，　　$l\vec{a}(D) = 3$

これから、定理Bだけの証明を示す。

<u>*Proof of theorem B*</u>

定理A，Bの証明は、共に帰納法を用いて行なうが、その際つぎの事実2に注意する。

<u>事実2</u>　　DはA1，A2を満たす2-正則有向グラフならば，(1) $|V(D)| \geq 3$ ．

(2) $|V(D)| = 3$ ならば，$D \cong K_3^*$，$l\vec{a}(K_3^*) = 4$

この事実は容易に示すことができる．つぎの補題1は、まず $l\vec{a}(D)$ の下限を求めたものである．

<u>補題1</u>　Dが k－正則有向グラフならば,

$$l\vec{a}(D) \geqq k+1$$

（証明）有向グラフDに対して、つぎの式が成立する。

$$\sum_{x \in V(D)} deg^{+}(x) = \sum_{x \in V(D)} deg^{-}(x) = |A(D)| \qquad (1.1)$$

そこで、Dを k－正則有向グラフとし、$l\vec{a}(D)=k$ と仮定する。ここで各 $i=1,\cdots,k$ に対して、F_i をDの有向線形林とすると、以下に示す不等式が成立する．

$$|A(F_i)| \leqq |V(D)|-1 \quad (i=1,\cdots,k) \qquad (1.2)$$

（1.2）式より．

$$\sum_{i=1}^{k} |A(F_i)| \leqq k|V(D)|-k \qquad (1.3)$$

となる。ところで、Dは k－正則有向グラフなので、

$$\sum_{x \in V(D)} deg^{-}(x) = k|V(D)| \qquad (1.4)$$

である。ここで、$|A(D)|$ を評価すると、（1.3）より

$$|A(D)| \leqq \sum_{i=1}^{k} |A(F_i)| \leqq k|V(D)|-k \qquad (1.5)$$

となるが，（1.1）と（1.4）より矛盾が導かれる．$l\vec{a}(D) \geqq k$ は明らかに成立するので、この補題が成立する。　□

つぎの補題2は、定理Bの仮定を満たす有向グラフDが、3つの有向線形林で覆えることを示している．

<u>補題2</u>　Dは、A1を満たす連結2－正則有向グラフで、$D \neq K_3^*$ かつ $|V(D)| \geqq 3$ ならば，$l\vec{a}(D) \leqq 3$．

（証明）Dの位数に関する帰納法を用いる．$x \in V(D)$ に対

して、$N(x)$をつぎのように定義する．

$$N(x)=\{y\in V(D)\mid (x,y)\in A(D) \text{ または } (y,x)\in A(D)\}$$

$|N(x)|=1$ならば，$|V(D)|=2$となるので仮定に反する。よって、$|N(x)|\geqq 2$としてよい。さらに、$l\vec{a}(D)\leqq 3$を満足するDに対しては、いつも3つの互いに素な有向線形林F_1，F_2，F_3で覆われているものとする。このとき、各F_iを色iでぬると、Dは3色1，2，3で色分けされる。$a\in A(D)$に対して、$c(a)$は弧aにぬられている色とする。$u,v\in V(D)$に対して、$n(u,v)$をuとvを結ぶ弧の数とする．$|V(D)|=3$の場合、この補題は容易に確かめられるので、$|V(D)|\geqq 4$で考える。

<u>Case 1</u>　$|N(x)|=2$　：$N(x)=\{y_1,y_2\}$とおいて分類する。

<u>Case 1.1</u>　$n(x,y_1)=1$ or 3．：$n(x,y_1)=3$の場合を調べれば十分である。$N(y_1)\setminus\{x\}=\{z\}$とおき、$(x,y_2)\in A(D)$と仮定する。これから、2つの場合に分ける。

(I)　$z\neq y_2$　：$D^*=D-\{x,y_1\}+(z,y_2)$とおく。このとき、$D^*\cong K_3^*$の場合に例外となるが、Dにもどせば直接、3色でぬれることがわかる。（図2.1）　$D^*\not\cong K_3^*$ならば、帰納法の仮定より，$l\vec{a}(D^*)\leqq 3$となる。$c((z,y_2))=1$としてよいので、図2.2のようにもどせる。

(II)　$z=y_2$　：　$N(y_2)\setminus\{x,y_1\}=\{w_1,w_2\}$とおく。ただし、$w_1=w_2$となる場合もある。そこで、$w_1\neq y_1$かつ

$x \neq w_2$ に注意して，$D^* = D - y_2 + (w_1, y_1) + (x, w_2)$ とおく。$|V(D^*)| \geq 4$ より，$l\vec{\alpha}(D^*) \leq 3$ となる。$c((w_1, y_1)) = \alpha$，$c((x, w_2)) = \beta$ とおくとき，$\alpha \neq \beta$ ならば，Dにおいて，$c((w_1, y_2)) = c((y_2, y_1)) = \alpha$，$c((x, y_2)) = c((y_2, w_2)) = \beta$ とすればよい。したがって、$\alpha = \beta = 1$ の場合を考えれば十分。このときは，図2.3のようにして，Dにもどせる。ただし，D^*に対しては，$c((x, y_1)) = 2$，$w_1 \neq w_2$ と仮定してよいことに注意する。

<u>Case 1.2</u> $n(x, y_1) = 2$ ：xとy_1を結ぶ弧は，同じ方向（$(y_1, x)_1, (y_1, x)_2 \in A(D)$とする。）か、異なるかである。

(I) 同じ方向の場合 ：$D^* = D - x + (y_1, y_2)_1 + (y_1, y_2)_2$ とおく。ただし、$(y_1, y_2)_1$，$(y_1, y_2)_2$ は、多重弧(y_1, y_2) を意味するものとする。$D^* \neq K_3^*$ かつ $|V(D^*)| \geq 3$ より，$l\vec{\alpha}(D^*) \leq 3$．したがって，$c((y_1, y_2)_1) = 1$，$c((y_1, y_2)_2) = 2$ とおけば，Dに対して，図2.4のように色を割りつけられる。

(II) 異なる方向の場合 ：$D^* = D - x + (y_1, y_2) + (y_2, y_1)$ とおく。$D^* \cong K_3^*$ の場合に例外となるが，この場合もDを直接3色でぬれることがわかる。（図2.5）$D^* \neq K_3^*$ ならば，D^*は3色でぬれる。よって、$c((y_1, y_2)) = 1$，$c((y_2, y_1)) = 2$ とすれば，Dにおいて，$c((y_1, x)) = c((x, y_2)) = 1$，$c((y_2, x)) = c((x, y_1)) = 2$ とおけばよい。

<u>Case 2</u> $|N(x)|=3$ ： $N(x)=\{y_1, y_2, y_3\}$とおく。このとき，$n(x_1, y_1)=2$と仮定してよい。ここで，xとy_1を結ぶ2つの弧a_1，a_2の方向に関して場合に分ける。

<u>Case 2.1</u> a_1とa_2は同じ方向の場合 ；$(y_1, x)_1$，$(y_1, x)_2 \in A(D)$の場合のみ示す。$D^*=D-x+(y_1, y_2)+(y_1, y_3)$とおく。$D^* \cong K_3^*$となる例外のDは、$l\vec{a}(D)\leqq 3$なる事実と共に図2.6に示されている。$D^* \not\cong K_3^*$ならば，$l\vec{a}(D^*)\leqq 3$である。$c((y_1, y_2)) \neq c((y_1, y_3))$より，$c((y_1, y_2))=1$，$c((y_1, y_3))=2$としてよい。このとき，$c((y_1, x)_1)=c((x, y_2))=1$，$c((y_1, x)_2)=c((x, y_3))=2$とおけば、Dにもどすことができる。

<u>Case 2.2</u> a_1とa_2は異なる方向の場合 ：まずD^*を$D^*=D-x+(y_1, y_3)+(y_2, y_1)$とおく。$D^* \cong K_3^*$となる例外のDに対して、$l\vec{a}(D)\leqq 3$が成立する。（図2．7） 一方，$D^* \not\cong K_3^*$ならば、$l\vec{a}(D^*)\leqq 3$となる。$c((y_2, y_1)) \neq c((y_1, y_3))$ならば、$c((y_2, y_1))=1$，$c((y_1, y_3))=2$としてよいので、$c((y_1, x)=c((x, y_3))=2$，$c((x, y_1))=c((y_2, x))=1$とおけば、Dを得る。$c((y_2, y_1))=c((y_1, y_3))$のとき，$N(y_1)\setminus\{x\}=\{z_1, z_2\}$とおく。$c((z_1, y_1)) \neq c((y_1, z_2))$ならば，$c((y_2, y_1))=1$，$c((z_1, y_1))=2$，$c((y_1, z_2))=3$としてよい。したがって、図2.8のようになる。もし、$c((z_1, y_1))=c((y_1, z_2))$ならば，$c((y_2, y_1))=1$，$c((z_1, y_1))=2$としてよいので、Dにもどせる．（図2.9）

Case 3　$\forall x \in V(D)$，$|N(x)|=4$　：　$N(x)=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$とし、$(y_1, x)$, (y_2, x), (x, y_3), $(x, y_4) \in A(D)$と仮定する。このとき，$D^* = D - x + (y_1, y_4) + (y_2, y_3)$とおく。

Case 3.1　D^*が非連結有向グラフとなる場合　：ここで、各$i=1,2$に対して、D^*の連結成分D_i^*の位数は4以上となることに注意する。したがって、$la(D_i^*) \leqq 3$（$i=1, 2$）。$c((y_1, y_4)) \neq c((y_2, y_3))$とできるので、明らかにDにもどせる。

Case 3.2　D^*が連結有向グラフとなる場合　：Case 3.1より、$c((y_1, y_4))=c((y_2, y_3))=1$と仮定してよい。ここで、$y_3$から$y_1$への色1の有向道及び$y_4$から$y_2$への色1の有向道が、両方とも存在することはない。よって、y_4からy_2への色1の有向道はないとしてよい。さらに、D^*においてy_3, y_4に入ってくる弧で、(y_2, y_3), (y_1, y_4)と異なるものをそれぞれ(s, y_3), (t, y_4)とし，y_1から出る弧で、(y_1, y_4)と異なるものを(y_1, u)とおく。しかも、$c((y_1, u))=2$と仮定してよい。以上をまとめたものが、図2.10である。

(I)　$c((s, y_3))=3$または、$c((t, y_4))=3$の場合　：$c((s, y_3))=3$の場合だけ調べる。このとき、図2.11のようにしてDにもどせることがわかる。

(II)　$c((s, y_3))=c((t, y_4))=2$の場合　：ここでは つぎの点に注意する。つまり，$y_3$から$y_1$への色3の有向道及び、

y_4からy_1への色3の有向道は両方とも存在することはない。よって、y_3からy_1への色3の有向道はないと仮定する。ここで、Dにもどすと図2.12のようになる.

以上で補題2が成立することがわかった. □

補題1,2をまとめれば、定理Bを得る。(定理Aも同様にして証明される。)

References

[1] H. Enomoto, B. Péroche; The linear arboricity of some regular graphs, JGT 8 (1984) 309−324.

[2] F. Harary; Covering and packing in graphs, I. Ann. N.Y. Acad. Sci. 175 (1970) 198−205.

[3] R. Stanton, D. Cowan, L. James; Some results on path numbers, Proc. Louisiana Conf. Combinatorics, Graph Theory and Computing, Baton Rouge (1970) 112−135.

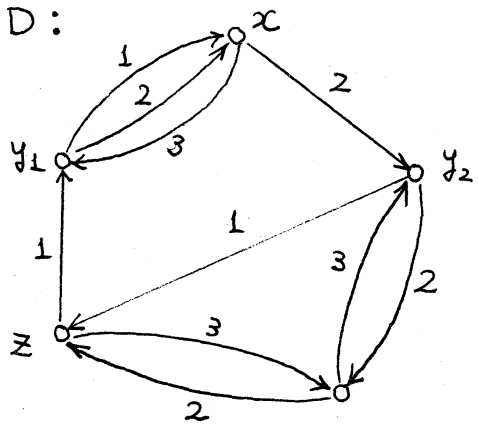

図 2.1

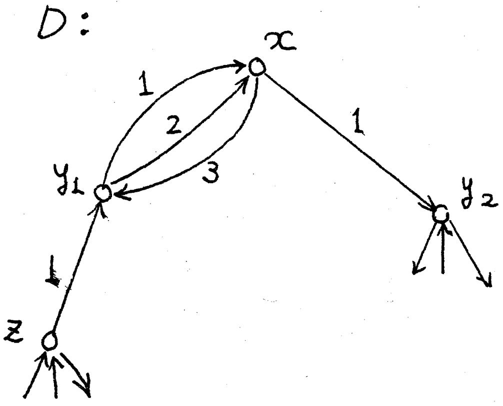

図 2.2

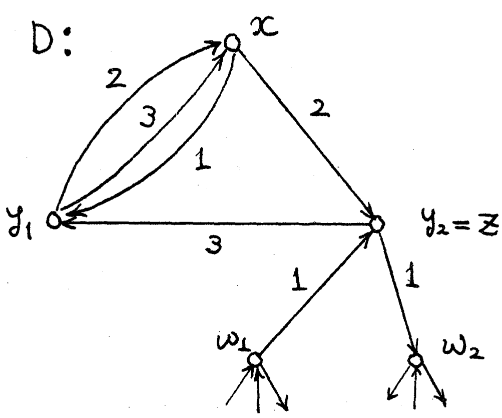

図 2.3

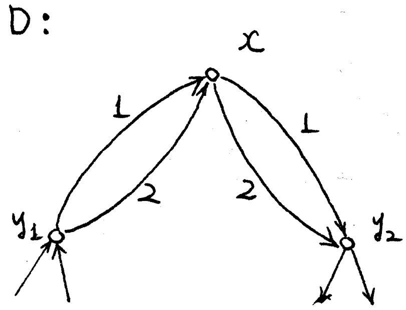

図 2.4

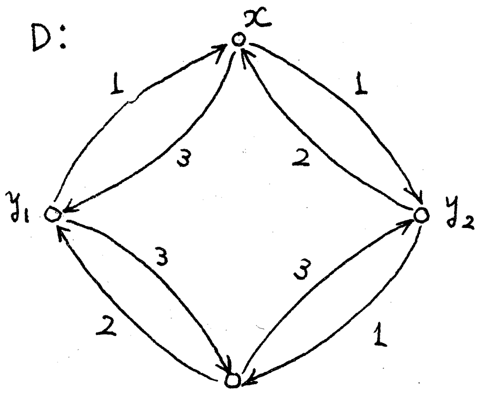

図 2.5

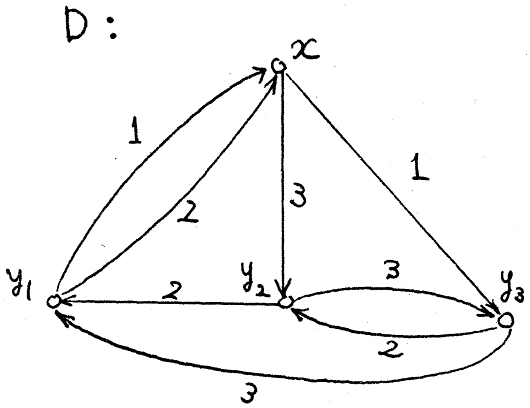

図 2.6

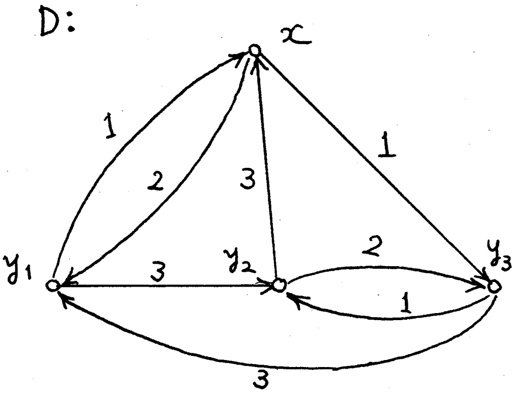

図2.7

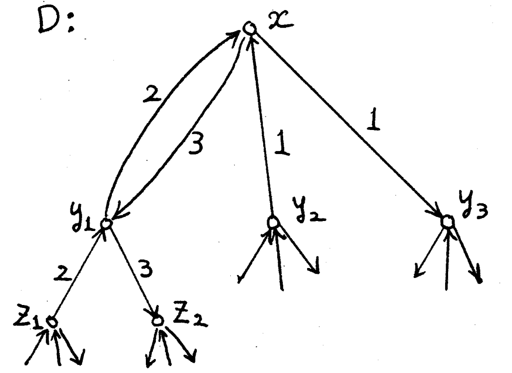

図2.8

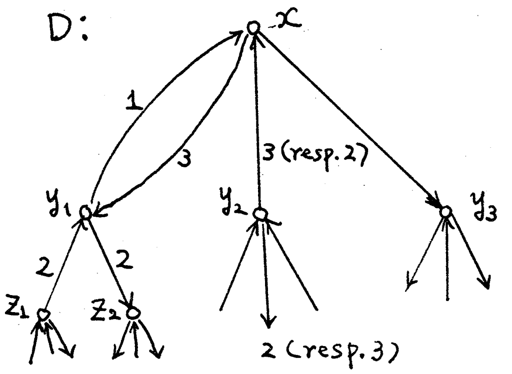

図2.9

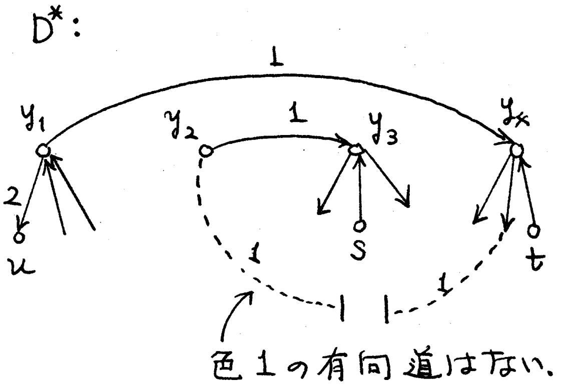

図2.10

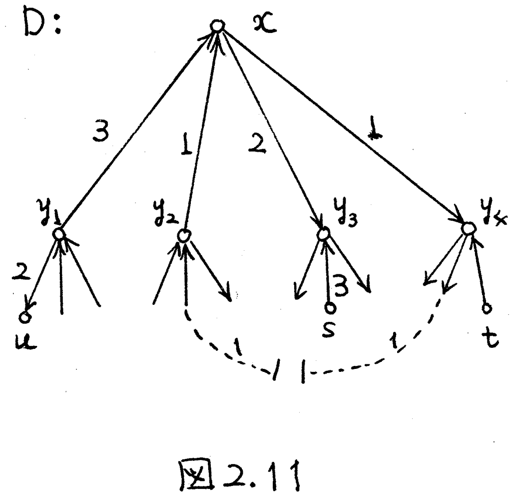

図2.11

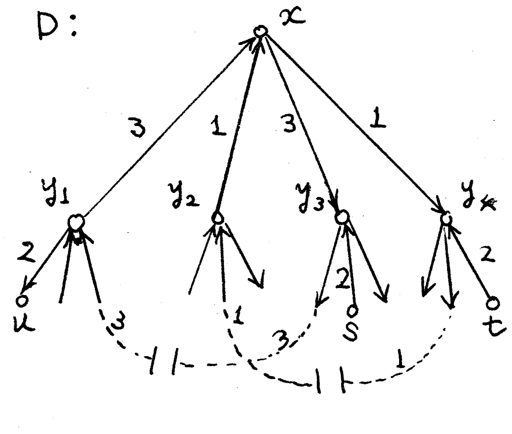

図2.12